EXERCICE 5A.1

Soit la fonction définie sur]0 ; +∞[par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln x}{x}$$

1. a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. En déduire que $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f, admet une asymptote *(d)* dont on précisera l'équation.

2. a. Montrer que $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f, admet la droite *(Δ)* d'équation $y = x + 1$ pour asymptote en +∞.

b. Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à *(Δ)*.

3. a. Calculer la fonction dérivée de f.

b. On admet que f' est strictement positive sur]0 ; +∞[. En déduire le sens de variation de f.

4. Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), tracer $\mathcal{C}$, *(Δ)*, et *(d)*.

EXERCICE 5A.2

Soit la fonction définie sur]2 ; +∞[par :

$$f(x) = x + \ln\frac{x-2}{x+2}$$

1. a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. En déduire que $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f, admet une asymptote *(d)* dont on précisera l'équation.

2. a. Montrer que $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f, admet la droite *(Δ)* d'équation $y = x$ pour asymptote en +∞.

b. Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à *(Δ)*.

3. a. Calculer la fonction dérivée de f.

b. Etudier le signe de f'.

c. En déduire le sens de variation de f.

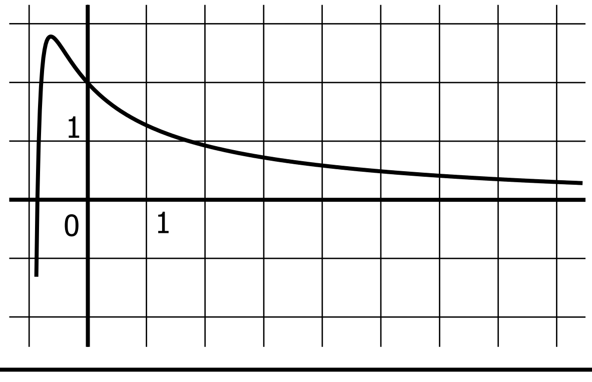
4. Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), tracer $\mathcal{C}$, *(Δ)*, et *(d)*, ainsi que la tangente à la courbe au point 4.

EXERCICE 5A.3 - BTS 2005

Soit f la fonction définie sur]-1 ; +∞[par :

$$f(x) = x + \ln\frac{x-2}{x+2}$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal est donnée ci-dessous :



1. On admet que :

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$.

2. a. Démontrer que pour tout x de]-1 ; +∞[,

$$f(x) = \frac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

b. Résoudre l'inéquation $-1-\ln(1+x) \geq 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans]-1 ; +∞[.

c. Etablir le tableau de variation de f.

EXERCICE 5A.4 - BAC 2009

Partie A

Soit la fonction définie sur]0 ; +∞[par :

$$g(x) = 1 - \ln x + 2x^2$$

1. Montrer que : $g'(x) = \dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x}$

2. a. Etudier le signe de $g'(x)$ sur]0 ; +∞[.

b. Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$

c. Dresser le tableau de variation de g sur]0 ; +∞[(sans les limites).

3. En déduire que pour tout x de]0 ; +∞[, $g(x)$ est strictement positif.

Partie B

Soit la fonction définie sur]0 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2x - 3$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe dans le repère orthogonal (O, I, J) (unités : 2 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées).

1. Etudier la limite de f en 0. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

2. Etudier la limite de f en +∞ et démontrer que la droite *(Δ)* d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en +∞.

3. Montrer que pour tout x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

En déduire le signe de $f'(x)$ sur]0 ; +∞[.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Soit A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives e et $\sqrt{e}$.

a. Donne les valeurs arrondies au centième des coordonnées de A et B.

b. En déduire que f est positive sur [$\sqrt{e}$; e].

6. Tracer la droite *(Δ)*, la courbe $\mathcal{C}$ et placer A et B.

7. a. Démontrer qu'au point A, la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à *(Δ)*.

b. Le point A est-il le seul point de $\mathcal{C}$ admettant une tangente parallèle à *(Δ)* ?

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI MONTPELLIER

EXERCICE 5A.1

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+1+\frac{\ln x}{x}$$

1. a. Limites de f aux bornes de son ensemble de définition :

$$\lim_{x\to+\infty} x+1=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

Par somme : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} x+1=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$$

Par somme : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

b. La courbe représentative de f, admet une asymptote verticale (d) d'équation : y = 0.

2. a. $f(x)-(x+1)=x+1+\frac{\ln x}{x}-(x+1)=\frac{\ln x}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=0$$

$\mathscr{C}$, la courbe représentative de f, admet la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ pour asymptote en $+\infty$.

b. Position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ) :

$\forall x\in]1;+\infty[\ :\ \frac{\ln x}{x}>0$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de (Δ)

$\forall x\in]0;1[\ :\ \frac{\ln x}{x}<0$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessous de (Δ)

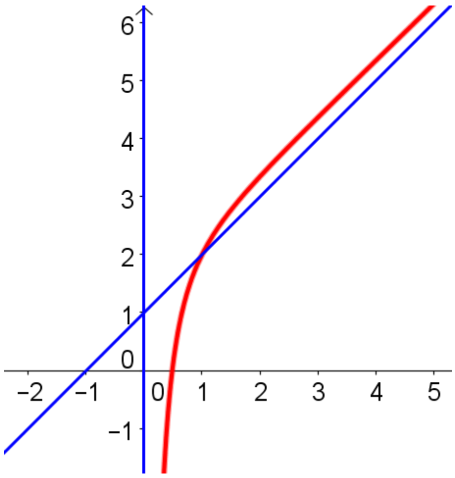
3. a. f est dérivable en tant que somme et quotient de fonction logarithme et polynômiale.

$$\forall x\in]0;+\infty[\ :\quad f'(x)=1+\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}$$

$$f'(x)=1+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}$$

b. On admet que f' est strictement positive sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

4.



EXERCICE 5A.2

Soit la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+\ln\frac{x-2}{x+2}=x+\ln\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=x+\ln\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

1. a. Limites de f aux bornes de son ensemble de définition :

$$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}=1\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}=0$$

Par somme : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to 2^+} x=2\ ;\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x+2}=0^+\ ;\ \lim_{x\to 2^+}\ln\frac{x-2}{x+2}=-\infty$$

Par somme : $\lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$

b. La courbe représentative de f, admet une asymptote verticale (d) d'équation : $x = 2$.

2. a. $f(x)-x=f(x)=x+\ln\frac{x-2}{x+2}-x=\ln\frac{x-2}{x+2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x-2}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}=0$$

La courbe représentative de f, admet la droite (Δ) d'équation $y = x$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

b. Position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ) :

$$\ln\frac{x-2}{x+2}>0 \iff \ln\frac{x-2}{x+2}>\ln 1 \iff \frac{x-2}{x+2}>1$$

$\iff x-2>x+2 \iff -2>2$ **: IMPOSSIBLE**

$\forall x\in]2;+\infty[:\ln\frac{x-2}{x+2}<0$: $\mathscr{C}$ est au-dessous de (Δ)

3. a. f est dérivable en tant que somme et quotient de fonction logarithme et polynômiale.

$$\forall x\in]2;+\infty[\ :\ f'(x)=1+\frac{\frac{1\times(x+2)-(x-2)\times 1}{(x+2)^2}}{\frac{x-2}{x+2}}$$

$$f'(x)=1+\frac{x+2-x+2}{(x+2)^2}\times\frac{x+2}{x-2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{4}{(x+2)(x-2)}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-4+4}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2}{(x+2)(x-2)}$$

b. $\forall x\in]2;+\infty[\ :\quad x+2>0$ et $x-2>0$

donc $\forall x\in]2;+\infty[\ :\ f'(x)>0$

c. Ainsi $\forall x \in]2;+\infty[$, la fonction f est croissante.

4. Tangente à la courbe au point 4 :

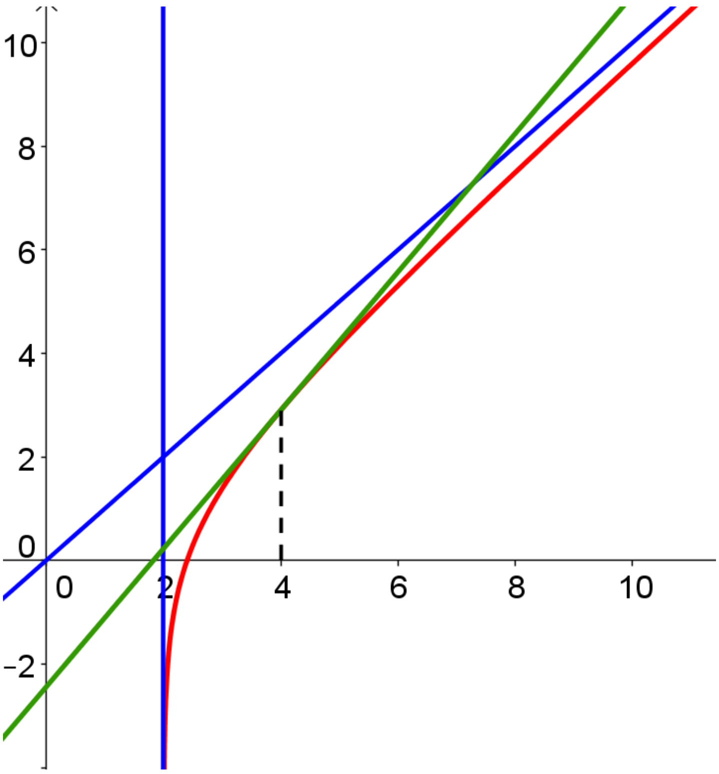
$$T_4 : y = f'(4)(x-4) + f(4)$$

$$f'(4) = \frac{4^2}{(4+2)(4-2)} = \frac{16}{6\times 2} = \frac{4}{3}$$

$$f(4) = 4 + \ln\frac{4-2}{4+2} = 4 + \ln\frac{2}{6} = 4 - \ln 3$$

$$T_4 : y = \frac{4}{3}(x-4) + 4 - \ln 3 = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3} + 4 - \ln 3$$

$$T_4 : y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} - \ln 3$$

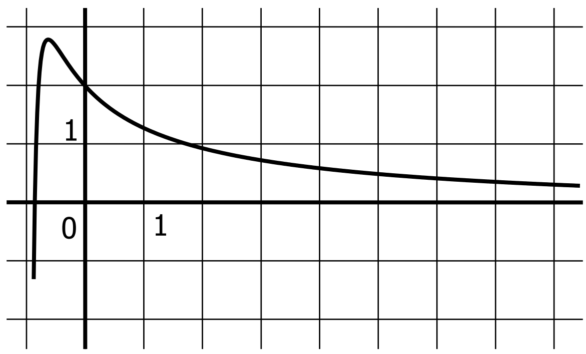


EXERCICE 5A.3 - BTS 2005

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal est donnée ci-dessous :



1. On admet que :

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

La courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes, l'une horizontale d'équation y = 0 et une verticale d'équation x = -1.

2. a. f est dérivable en tant que quotient de fonction logarithme et polynômiale.

$\forall x \in]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}\times(1+x) - [2+\ln(1+x)]\times 1}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-2-\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

b. $-1-\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln(1+x) \geq 1$

$$\Leftrightarrow \ln(1+x) \leq -1 \Leftrightarrow 1+x \leq e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{e} - 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1-e}{e}$$

$$\forall x \in \left]-1;\frac{1-e}{e}\right[\ : \ f'(x) \geq 0$$

$$\forall x \in \left]\frac{1-e}{e};+\infty\right[\ : \ f'(x) \leq 0$$

c. Tableau de variation de f.

$$f\left(\frac{1-e}{e}\right) = \frac{2+\ln\left(1+\frac{1-e}{e}\right)}{1+\frac{1-e}{e}} = \frac{2+\ln\left(\frac{e}{e}+\frac{1-e}{e}\right)}{\frac{e}{e}+\frac{1-e}{e}}$$

$$f\left(\frac{1-e}{e}\right) = \frac{2+\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = e(2-\ln e)$$

x	-1		$\frac{1-e}{e}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e(2-\ln e)$	$\searrow$	0

EXERCICE 5A.4 - BAC 2009

Partie A

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \ln x + 2x^2$$

1. g est dérivable en tant que somme de fonctions logarithme et polynômiale :

$$\forall x \in]0;+\infty[: \quad g'(x) = -\frac{1}{x} + 4x = \frac{4x^2-1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$$

2. a. $\forall x \in]0;+\infty[\ :\ 2x+1>0$ et $x>0$

$2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$

$\forall x \in \left]0;\dfrac{1}{2}\right]\ :\ g'(x)\leq 0$

$\forall x \in \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[\ :\ g'(x)\geq 0$

b. $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\ln\dfrac{1}{2}+2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=1+\ln 2+2\times\dfrac{1}{4}$

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{2}+\ln 2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}+\ln 2$

c. Dresser le tableau de variation de g sur $]0\ ;\ +\infty[$ (sans les limites).

x	0		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$1,5+\ln 2$	$\nearrow$	

3. $g\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$

$\forall x \in \left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ g est continue et strictement décroissan--te, d'après le théorème de la bijection, g ne s'annule pas sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\ln x+2x^2=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x^2\left(\dfrac{-\ln x}{x^2}+2\right)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\ln x}{x^2}+2=2$

Donc par somme et produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$\forall x \in \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ g est continue et strictement croissan--te, d'après le théorème de la bijection, g ne s'annule pas sur $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

DONC $\forall x \in]0;+\infty[\ :\ g(x)$ est strictement positif.

Partie B

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}+2x-3$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe dans le repère orthogonal (O, I, J) (unités : 2 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées).

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x-3=-3$

Donc par somme : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$

$\mathscr{C}$ admet une asymptote d'équation : $x = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3=+\infty$

Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-(2x-3)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0^+$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. f est dérivable en tant que somme et quotient de fonction logarithme et polynômiale.

$\forall x \in]0;+\infty[\ :\ f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}+2$

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+\dfrac{2x^2}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$

Or $\forall x \in]0;+\infty[\ :\ g(x)>0$ donc $f'(x)>0$

4. Tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Soit A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives e et $\sqrt{e}$.

a. $f(e)=\dfrac{\ln e}{e}+2e-3=\dfrac{1+2e^2-3e}{e}$

$f\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}+2\sqrt{e}-3=\dfrac{\frac{1}{2}\ln e}{\sqrt{e}}+2\sqrt{e}-3$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}+2\sqrt{e}-3=\dfrac{\sqrt{e}}{2e}+2\sqrt{e}-3$

$=\dfrac{\sqrt{e}+4e\sqrt{e}-6e}{2e}$

$\mathrm{A}\left(e;\dfrac{1+2e^2-3e}{e}\right)$ et $\mathrm{B}\left(\sqrt{e};\dfrac{\sqrt{e}+4e\sqrt{e}-6e}{2e}\right)$

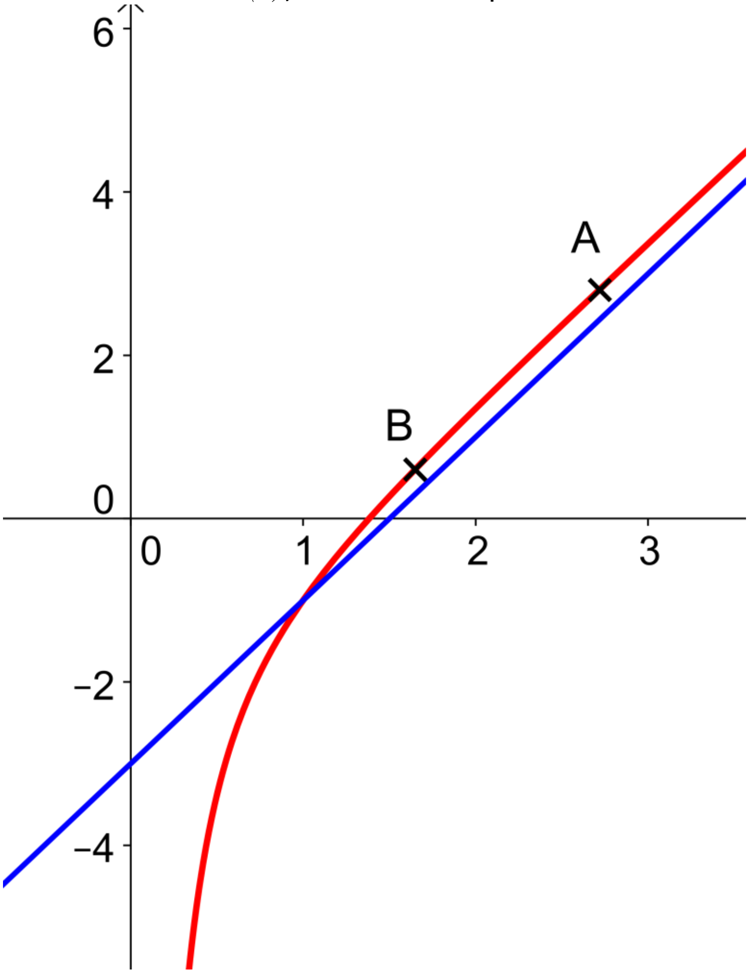
$\mathrm{A}(2,72;2,80)$ et $\mathrm{B}(1,65;0,60)$

(valeurs arrondies au centième).

b. $f\left(\sqrt{e}\right) > 0$ et f est continue et strictement croissante sur $\left[\sqrt{e}\,;e\right]$.

Donc f est positive sur $\left[\sqrt{e}\,;e\right]$.

6. Tracer la droite *(Δ)*, la courbe $\mathscr{C}$ et placer A et B.



7. a. $f'(e) = \dfrac{1 - \ln e + 2e^2}{e^2} = \dfrac{2e^2}{e^2} = 2$

Or la droite *(Δ)* a pour équation $y = 2x - 3$
Donc au point A, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à *(Δ)* :

b. $f'(x) = 2 \iff \dfrac{1 - \ln x + 2x^2}{x^2} = 2$

$\iff 1 - \ln x + 2x^2 = 2x^2 \iff 1 - \ln x = 0$

$\iff 1 = \ln x \iff x = e$

Le point A est le seul point de $\mathscr{C}$ admettant une tangente parallèle à *(Δ)* .