RAPPEL :

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $[\ln u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) > 0$ $\qquad$ Si $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ alors $F(x) = \ln|u(x)| + c$ avec $u(x) \neq 0$

EXERCICE 4A.1

Dans chaque cas, déterminer la dérivée de la fonction f définie et dérivable sur I :

a. $f(x) = \ln(4x+5)$ $\quad$ I = $\left]-\dfrac{5}{4};+\infty\right[$

b. $f(x) = \ln(3-2x)$ $\quad$ I = $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[$

c. $f(x) = \ln(x^2+3x+4)$ $\quad$ I = $\mathbb{R}$

d. $f(x) = \ln(\sin x)$ $\quad$ I = $]0 ; \pi[$

e. $f(x) = \ln(x-1)$ $\quad$ I = $]1 ; +\infty[$

f. $f(x) = \ln(2x^2-3x+2)$ $\quad$ I = $\mathbb{R}$

g. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ $\quad$ I = $]0 ; +\infty[$

h. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)$ $\quad$ I = $]-1 ; +\infty[$

i. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)$ $\quad$ I = $]-1 ; +\infty[$

j. $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ $\quad$ I = $]0 ; +\infty[$

EXERCICE 4A.2

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction f définie et dérivable sur I :

a. $f(x) = \dfrac{5}{x}$ $\quad$ I = $]0 ; +\infty[$

b. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ $\quad$ I = $]0 ; +\infty[$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ I = $]0 ; +\infty[$

d. $f(x) = \dfrac{2}{x}\ln x$ $\quad$ I = $]0 ; +\infty[$

e. $f(x) = \dfrac{2}{2x+1}$ $\quad$ I = $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

f. $f(x) = \dfrac{1}{3x+5}$ $\quad$ I = $\left]-\dfrac{5}{3};+\infty\right[$

g. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad$ I = $]0 ; +\infty[$

h. $f(x) = \dfrac{4x-2}{x^2 - x + 1}$ $\quad$ I = $\mathbb{R}$

EXERCICE 4A.3

Dans chaque cas, déterminer la primitive de la fonction f vérifiant la condition initiale :

a. $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ $\quad$ I = $]1 ; +\infty[$ $\quad$ $F(2) = 3$

b. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$ $\quad$ I = $]1 ; +\infty[$ $\quad$ $F(2) = \ln 2$

EXERCICE 4A.4

On considère les fonctions suivantes définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln x \qquad\qquad g(x) = \ln x + 1$$

a. $f(x)$ est-elle une primitive de $g(x)$? Justifier.
b. Déterminer LA primitive de g qui s'annule pour $x = e$

EXERCICE 4A.5

On considère les fonctions suivantes définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\ln x}{x} \qquad\qquad g(x) = (\ln x)^2$$

$f(x)$ est-elle une primitive de $g(x)$? Justifier.

EXERCICE 4A.6

On considère la fonction suivante définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2\ln x + 3 .$$

Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x(a\ln x + b)$ soit une primitive de f.

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER
CORRIGE UNIQUEMENT DE L'EXERCICE 1 SUR LES DERIVEES

EXERCICE 4A.1

Dans chaque cas, déterminer la dérivée de la fonction f définie et dérivable sur I : $-\left]-\frac{5}{4};+\infty\right[$

a. $f(x)=\ln(4x+5)$ I = $\left]-\frac{5}{4};+\infty\right[$

$f'(x)=\dfrac{4}{4x+5}$

b. $f(x)=\ln(3-2x)$ I = $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$

$f'(x)=\dfrac{-2}{3-2x}$

c. $f(x)=\ln\left(x^2+3x+4\right)$ I = $\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}$

d. $f(x)=\ln(\sin x)$ I =]0 ; π[

$f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

e. $f(x)=\ln(x-1)$ I =]1 ; +∞[

$f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$

f. $f(x)=\ln\left(2x^2-3x+2\right)$ I = $\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{4x-3}{2x^2-3x+2}$

g. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ I =]0 ; +∞[

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1\times x-(x+1)\times 1}{x^2}}{\dfrac{x+1}{x}}=\frac{x-x-1}{x^2}\times\frac{x}{x+1}$$

$f'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)}$

h. $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)$ I =]-1 ; +∞[

$$f'(x)=\frac{\dfrac{2(x+1)-(2x+3)\times 1}{(x+1)^2}}{\dfrac{2x+3}{x+1}}=\frac{2x+2-2x-3}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{2x+3}$$

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x+1)(2x+3)}$

i. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)$ I =]-1 ; +∞[

$$f'(x)=\frac{\dfrac{(2x+1)\times(x+1)-\left(x^2+x+1\right)\times 1}{(x+1)^2}}{\dfrac{x^2+x+1}{x+1}}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+3x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{x(x+2)}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}$$

j. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x}\right)$ I =]0 ; +∞[

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2x}$$

EXERCICE 4A.2

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction f définie et dérivable sur I :

a. $f(x)=\dfrac{5}{x}$ I =]0 ; +∞[

b. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ I =]0 ; +∞[

c. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ I =]0 ; +∞[

d. $f(x)=\dfrac{2}{x}\ln x$ I =]0 ; +∞[

e. $f(x)=\dfrac{2}{2x+1}$ I = $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

f. $f(x)=\dfrac{1}{3x+5}$ I = $\left]-\frac{5}{3};+\infty\right[$

g. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ I =]0 ; +∞[**h.** $f(x) = \dfrac{4x - 2}{x^2 - x + 1}$ I = $\mathbb{R}$

EXERCICE 4A.3

Dans chaque cas, déterminer la primitive de la fonction f vérifiant la condition initiale :

a. $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ I =]1 ; +∞[$F(2) = 3$

b. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$ I =]1 ; +∞[$F(2) = \ln 2$

EXERCICE 4A.4

On considère les fonctions suivantes définies et dérivables sur]0 ; +∞[par :

$f(x) = x \ln x$ $g(x) = \ln x + 1$

a. $f(x)$ est-elle une primitive de $g(x)$? Justifier.
b. Déterminer LA primitive de g qui s'annule pour $x = e$

EXERCICE 4A.5

On considère les fonctions suivantes définies et dérivables sur]0 ; +∞[par :

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{\ln x}{x}$ $g(x) = (\ln x)^2$

$f(x)$ est-elle une primitive de $g(x)$? Justifier.

EXERCICE 4A.6

On considère la fonction suivante définie et dérivable sur]0 ; +∞[par :

$$f(x) = 2 \ln x + 3 .$$

Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur]0 ; +∞[par $F(x) = x(a \ln x + b)$ soit une primitive de f.