RAPPEL : pour tous réels a et b strictement positifs, on a les égalités :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \ln\frac{1}{a} = -\ln a \qquad \ln\left(a^n\right) = n\ln a$$

EXERCICE 2A.1

1. Décomposer les expressions comme dans l'exemple **a.** :

a. $\ln 5x =$ **$\ln 5 + \ln x$**

b. $\ln\frac{7}{x} =$

c. $\ln x^3 =$

d. $\ln\frac{2x}{3} =$

e. $\ln\frac{x^4}{5} =$

f. $\ln\frac{(x+1)^2}{x} =$

g. $\ln\frac{1}{7x^2} =$

h. $\ln\frac{(x+1)(x-2)}{x+3} =$

2. Recomposer les expressions comme dans l'exemple **a.** :

a. $\ln 5 + \ln x =$ **$\ln 5x$**

b. $\ln x + \ln 2 =$

c. $\ln x - \ln 7 =$

d. $7\ln x =$

e. $2\ln x - \ln 9 =$

f. $3\ln x - 5\ln y =$

g. $\ln(x+1) - \ln(3x-5) + \ln(6-5x) =$

h. $1 - \ln\left(x^2 + x + 1\right) =$

i. $3 + \ln x =$

j. $\ln x - 2 =$

EXERCICE 2A.2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations (on rappelle que ln n'est défini que sur $]0;+\infty[$) :

a. $\ln x = \ln 3$ avec $x \in \,]0;+\infty[$

b. $\ln(x+2) = \ln(5-x)$ avec $x \in \,]-2;+5[$

c. $\ln 3x = 1$ avec $x \in \,]0;+\infty[$

d. $\ln(x-5) = 1$ avec $x \in \,]5;+\infty[$

e. $\ln(x+3) = 0$ avec $x \in \,]-3;+\infty[$

f. $\ln\left(1-x^2\right) = \ln(1-x)$ avec $x \in \,]-1;1[$

2. Ecrire les équations suivantes sous la forme « ln A = ln B » puis résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\ln x + \ln 3 = \ln 5 - \ln x$ avec $x \in \,]0;+\infty[$

b. $2\ln(x+2) = \ln 25$ avec $x \in \,]-2;+\infty[$

c. $\ln x + \ln(x-1) = \ln\left(x^2 + x - 6\right)$ avec $x \in \,]1;+\infty[$

d. $2\ln(1-x) = \ln(x+5)$ avec $x \in \,]-5;1[$

e. $\ln(x+3) = \frac{1}{2}\ln 16$ avec $x \in \,]-3;+\infty[$

f. $2\ln x - \ln 4 = 1$ avec $x \in \,]0;+\infty[$

EXERCICE 2A.3

a. Décomposer les nombres suivants sous la forme $2^n \times 3^p$ où n et p sont des entiers naturels :

12 18 96 128 243 192 108

b. Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants :

$\ln 12$ $\ln 18$ $\ln 96$ $\ln\frac{128}{243}$ $\ln\frac{192}{108}$

c. Exprimer en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$ les nombres suivants :

$\ln 10$ $\ln 30$ $\ln\frac{1}{45}$ $\ln\frac{75}{12}$ $\ln\frac{135}{162}$

EXERCICE 2A.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

a. $\ln(x-1) \geq 0$; $x \in \,]1;+\infty[$

b. $\ln(x-1) < 0$; $x \in \,]1;+\infty[$

c. $\ln(x+2) \leq \ln 5$; $x \in \,]-2;+\infty[$

d. $\ln(2x+1) \geq 1$; $x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

e. $\ln(x+1) \leq 1$; $x \in \,]-1;+\infty[$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

EXERCICE 2A.1

1. Décomposer les expressions comme dans l'exemple **a.** :

a. $\ln 5x =$ **ln 5 + ln** x

b. $\ln\frac{7}{x} = \ln 7 - \ln x$

c. $\ln x^3 = 3\ln x$

d. $\ln\frac{2x}{3} = \ln 2x - \ln 3$

e. $\ln\frac{x^4}{5} = \ln x^4 - \ln 5 = 4\ln x - \ln 5$

f. $\ln\frac{(x+1)^2}{x} = \ln(x+1)^2 - \ln x = 2\ln(x+1) - \ln x$

g. $\ln\frac{1}{7x^2} = \ln 1 - \ln 7x^2 = -\ln\left(\sqrt{7}x\right)^2 = -2\ln\sqrt{7}x$

h. $\ln\frac{(x+1)(x-2)}{x+3} = \ln(x+1) + \ln(x-2) - \ln(x+3)$

2. Recomposer les expressions comme dans l'exemple **a.** :

a. ln 5 + ln x = **ln 5**x

b. $\ln x + \ln 2 = \ln 2x$

c. $\ln x - \ln 7 = \ln\frac{x}{7}$

d. $7\ln x = \ln x^7$

e. $2\ln x - \ln 9 = \ln x^2 - \ln 9 = \ln\frac{x^2}{9}$

f. $3\ln x - 5\ln y = \ln x^3 - \ln y^5 = \ln\frac{x^3}{y^5}$

g. $\ln(x+1) - \ln(3x-5) + \ln(6-5x) = \ln\frac{(x+1)(6-5x)}{3x-5}$

h $1 - \ln\left(x^2+x+1\right) = \ln e - \ln\left(x^2+x+1\right) = \ln\frac{e}{x^2+x+1}$

i. $3 + \ln x = \ln e^3 + \ln x = \ln\left(x \times e^3\right)$

j. $\ln x - 2 = \ln x - \ln e^2 = \ln\frac{x}{e^2}$

EXERCICE 2A.2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations (on rappelle que ln n'est défini que sur $]0;+\infty[$) :

a. $\ln x = \ln 3$ avec $x \in \,]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \; x = 3 \quad \rightarrow S = \{3\}$

b. $\ln(x+2) = \ln(5-x)$ avec $x \in \,]-2;5[$

$\Leftrightarrow \; x+2 = 5-x \;\Leftrightarrow\; 2x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2} \rightarrow S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

c. $\ln 3x = 1$ avec $x \in \,]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \; \ln 3x = \ln e \;\Leftrightarrow\; 3x = e \;\Leftrightarrow\; x = \frac{e}{3} \rightarrow S = \left\{\frac{e}{3}\right\}$

d. $\ln(x-5) = 1$ avec $x \in \,]5;+\infty[$

$\Leftrightarrow \; \ln(x-5) = \ln e \;\Leftrightarrow\; x-5 = e \;\Leftrightarrow\; x = e+5$

$e+5 \in \,]5;+\infty[$ donc $S = \{e+5\}$

e. $\ln(x+3) = 0$ avec $x \in \,]-3;+\infty[$

$\Leftrightarrow \; \ln(x+3) = \ln 1 \;\Leftrightarrow\; x+3 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = -2$

$-2 \in \,]-3;+\infty[$ donc $S = \{-2\}$

f. $\ln\left(1-x^2\right) = \ln(1-x)$ avec $x \in \,]-1;1[$

$\Leftrightarrow \; 1-x^2 = 1-x \;\Leftrightarrow\; x^2 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x-1) = 0$

2 solutions 0 et 1 mais $1 \notin \,]-1;1[$ donc $S = \{0\}$

2. Ecrire les équations suivantes sous la forme « ln A = ln B » puis résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\ln x + \ln 3 = \ln 5 - \ln x$ avec $x \in \,]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow 2\ln x = \ln 5 - \ln 3 \Leftrightarrow \ln x^2 = \ln\frac{5}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{3}$

2 sol $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ et $\sqrt{\frac{5}{3}}$ mais $-\sqrt{\frac{5}{3}} \notin \,]0;+\infty[\; \rightarrow S = \left\{\sqrt{\frac{5}{3}}\right\}$

b. $2\ln(x+2) = \ln 25$ avec $x \in \,]-2;+\infty[$

$\Leftrightarrow \; \ln(x+2)^2 = \ln 25 \;\Leftrightarrow\; (x+2)^2 = 25$

$\Leftrightarrow \; (x+2)^2 - 5^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+7)(x-3) = 0$

2 sol -7 et 3 mais $-7 \notin \,]-2;+\infty[$ donc $S = \{3\}$

c. $\ln x + \ln(x-1) = \ln\left(x^2+x-6\right)$ avec $x \in \,]1;+\infty[$

$\Leftrightarrow \; \ln[x(x-1)] = \ln\left(x^2+x-6\right) \;\Leftrightarrow\; x^2 - x = x^2 + x - 6$

$\Leftrightarrow \; -2x = -6 \;\Leftrightarrow\; x = 3$ avec $3 \in \,]1;+\infty[\; \rightarrow S = \{3\}$

d. $2\ln(1-x) = \ln(x+5)$ avec $x \in \,]-5;1[$

$\Leftrightarrow \; \ln(1-x)^2 = \ln(x+5) \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x + 1 = x + 5$

$\Leftrightarrow \; x^2 - 3x - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-4)(x+1) = 0$

2 sol : 4 et -1 mais $4 \notin \,]-5;1[$ donc $S = \{-1\}$

e. $\ln(x+3)=\frac{1}{2}\ln 16$ avec $x\in\left]-3;+\infty\right[$

$\Leftrightarrow\ \ln(x+3)=\ln\sqrt{16}\ \Leftrightarrow\ \ln(x+3)=\ln 4$

$\Leftrightarrow\ x+3=4\ \Leftrightarrow\ x=1\ \rightarrow S=\{1\}$

f. $2\ln x-\ln 4=1$ avec $x\in\left]0;+\infty\right[$

$\Leftrightarrow\ \ln x^2-\ln 4=1\ \Leftrightarrow\ \ln\frac{x^2}{4}=\ln e\ \Leftrightarrow\ \frac{x^2}{4}=e$

$\Leftrightarrow\ x^2=4e\ \Leftrightarrow\ \left(x+2\sqrt{e}\right)\left(x-2\sqrt{e}\right)=0$

Or $-2\sqrt{e}\notin\left]0;+\infty\right[\ \rightarrow S=\left\{2\sqrt{e}\right\}$

EXERCICE 2A.3

a. Décomposer les nombres suivants sous la forme $2^n\times 3^p$ où n et p sont des entiers naturels :

$12=4\times 3=2^2\times 3$ $\quad 18=2\times 9=2\times 3^2$ $\quad 96=32\times 3=2^5\times 3$ $\quad 128=2^7$

$243=3^5$ $\quad 192=64\times 9=2^6\times 3$ $\quad 108=4\times 27=2^2\times 3^3$

b. Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants :

$\ln 12=\ln\left(2^2\times 3\right)=2\ln 2+\ln 3$ $\quad \ln 18=\ln\left(2\times 3^2\right)=\ln 2+2\ln 3$ $\quad \ln 96=\ln\left(2^5\times 3\right)=5\ln 2+\ln 3$

$\ln\frac{128}{243}=\ln\frac{2^7}{3^5}=7\ln 2-3\ln 5$ $\quad \ln\frac{192}{108}=\ln\frac{2^6\times 3}{2^2\times 3^3}=\ln\frac{2^4}{3^2}=\ln 2^4-\ln 3^2=4\ln 2-2\ln 3$

c. Exprimer en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$ les nombres suivants :

$\ln 10=\ln(2\times 5)=\ln 2+\ln 5$ $\quad \ln 30=\ln(2\times 3\times 3)=\ln 2+\ln 3+\ln 5$

$\ln\frac{1}{45}=\ln 1-\ln 45=-\ln\left(3^2\times 5\right)=-2\ln 3-\ln 5$ $\quad \ln\frac{75}{12}=\ln\frac{3\times 5^2}{2^2\times 3}=\ln\frac{5^2}{2^2}=2\ln 5-2\ln 2$

$\ln\frac{135}{162}=\ln\frac{3^3\times 5}{2\times 3^4}=\ln\frac{5}{2\times 3}=\ln 5-\ln 2-\ln 3$

EXERCICE 2A.4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

a. $\ln(x-1)\geq 0$

$x\in\left]1;+\infty\right[$

$\Leftrightarrow\ \ln(x-1)\geq\ln 1$

$\Leftrightarrow\ x-1\geq 1$

$\Leftrightarrow\ x\geq 2$

$S=\left[2;+\infty\right[$

b. $\ln(x-1)<0$

$x\in\left]1;+\infty\right[$

$\Leftrightarrow\ln(x-1)<\ln 1$

$\Leftrightarrow x-1<1$

$\Leftrightarrow x<2$

or $x\in\left]1;+\infty\right[$

$S=\left]1;2\right[$

c. $\ln(x+2)\leq\ln 5$

$x\in\left]-2;+\infty\right[$

$\Leftrightarrow x+2\leq 5$

$\Leftrightarrow x\leq 3$

or $x\in\left]-2;+\infty\right[$

$S=\left]-2;3\right]$

d. $\ln(2x+1)\geq 1$

$x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\Leftrightarrow\ln(2x+1)\geq\ln e$

$\Leftrightarrow 2x+1\geq e$

$\Leftrightarrow x\geq\frac{e-1}{2}$

or $x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

$S=\left]-\frac{1}{2};\frac{e-1}{2}\right]$

e. $\ln(x+1)\leq 1$

$x\in\left]-1;+\infty\right[$

$\Leftrightarrow\ln(x+1)\leq\ln e$

$\Leftrightarrow x+1\leq e$

$\Leftrightarrow x\leq e-1$

or $x\in\left]-1;+\infty\right[$

$S=\left]-1;e-1\right]$