

EXERCICE 5A.1 - BAC 2007

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = e^{2x} - e^x$$

On appelle f' la fonction dérivée de f et C_f la courbe

représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 4 cm.

On remarquera que, pour tout réel x , on a :

$$e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et étudier son signe.

b. Calculer $f(-\ln 2)$. On détaillera les calculs.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

4. Tracer la droite T et la courbe C_f .

EXERCICE 5A.2 - BAC 2008

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{2x} - e^x - 6$$

On note f' sa fonction dérivée sur \mathbb{R} .

1. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a pour tout nombre réel x : $f'(x) = e^x(2e^x - 1)$

b. Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

2. a. Calculer la limite de f en $-\infty$.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre en facteur le nombre e^x dans l'expression de $f(x)$).

3. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant les limites de f .

b. Écrire le calcul qui montre que le minimum de la fonction f sur \mathbb{R} est égal à $\frac{-25}{4}$

c. D'après le tableau de variation de la fonction f , quel est le nombre de solutions sur \mathbb{R} de l'équation (E_1) suivante : $(E_1) : f(x) = 0$.

EXERCICE 5A.3 - BAC 2007

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{-x} + 2x - 3$$

Soit C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Limites aux bornes

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

On pourra établir au préalable que pour tout nombre réel

$$x, \quad f(x) = e^{-x}(1 + 2xe^x - 3e^x)$$

2. Asymptote oblique

a. Montrer que la droite (d) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe C_f .

b. Étudier la position relative de la droite (d) par rapport à la courbe C_f .

3. Étude des variations de la fonction f

a. Montrer que, pour tout nombre réel x ,

$$f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x}$$

où f' est la dérivée de la fonction f .

b. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $f'(x) = 0$

c. Étudier le signe de la dérivée f' de la fonction f sur \mathbb{R} .

d. Établir le tableau de variations de la fonction f .

e. Calculer $f(1)$ et déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.

4. Tracer la droite (d) et la courbe C_f dans le repère (O, I, J)

EXERCICE 5A.4 - BAC 2008

Partie A - On note g la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par :

$$g(x) = e^{-x}(-3x+1)+1$$

1. Calculer la dérivée g' de la fonction g .

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur \mathbb{R} , et dresser le tableau de variation (On ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$).

3. Calculer $g\left(\frac{4}{3}\right)$ et en déduire le signe de la fonction g sur \mathbb{R} .

Partie B - On considère maintenant la fonction f définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par :

$$f(x) = e^{-x}(3x+2)+x$$

On note C_f sa courbe représentative dans le repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Étude des limites.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Étude des variations de f .

a. Calculer la dérivée f' de la fonction f , et démontrer que, pour tout réel x : $f'(x) = g(x)$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

3. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$, et préciser la position de

la courbe C_f par rapport à la droite D . (On notera A leur point d'intersection.)

4. Déterminer l'abscisse du point B de la courbe C_f où la tangente T est parallèle à la droite D .

5. Tracer, dans le repère (O, I, J) , les droites D et T . Placer les points A et B puis tracer la courbe C_f .

CORRIGE – LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET
EXERCICE 5A.1 - BAC 2007

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = e^{2x} - e^x$$

On appelle f' la fonction dérivée de f et C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 4 cm.

On remarquera que, pour tout réel x , on a :

$$e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$$

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 1 = +\infty$

→ par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$

→ par produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

L'axe des abscisses d'équation : $y = 0$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a.

f est dérivable en tant que composée de fonctions exponentielles.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \ln \frac{1}{2}$$

Si $x > -\ln 2$: $f'(x) > 0$

b. $f(-\ln 2) = e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} = e^{\ln 2 - 2} - e^{\ln \frac{1}{2}}$

$$f(-\ln 2) = e^{\ln \frac{1}{4}} - e^{\ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

c. Tableau de variations de la fonction f .

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		\emptyset	
$f(x)$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

3. Equation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0 : $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

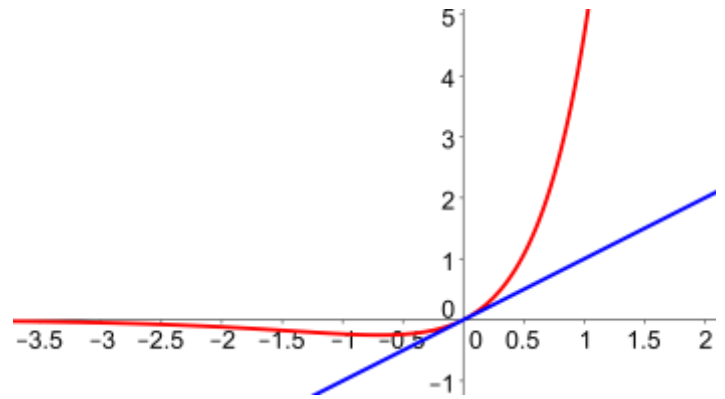
$$f'(0) = 2e^{2 \times 0} - e^0 = 2 - 1 = 1$$

$$f(0) = e^{2 \times 0} - e^0 = 1 - 1 = 0$$

Donc : $T : y = 1(x-0) + 0$

$$T : y = x$$

4. Tracer la droite T et la courbe C_f .



EXERCICE 5A.2 - BAC 2008

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{2x} - e^x - 6$$

On note f' sa fonction dérivée sur \mathbb{R} .

1. a. f est dérivable en tant que composée de fonctions exponentielles.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1)$$

b. Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \ln \frac{1}{2}$$

Si $x > -\ln 2$: $f'(x) > 0$

2. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0^+$

→ par somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -6$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$

→ par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3. a. Tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		\emptyset	
$f(x)$	-6	$-\frac{25}{4}$	$+\infty$

b. Minimum de la fonction f sur \mathbb{R} :

$$f(-\ln 2) = e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} - 6 = e^{\ln 2 - 2} - e^{\ln \frac{1}{2}} - 6$$

$$f(-\ln 2) = e^{\ln \frac{1}{4}} - e^{\ln \frac{1}{2}} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{25}{4}$$

c. Solutions sur \mathbb{R} de l'équation $(E_1) : f(x) = 0$:

Si $x \in]-\infty; -\ln 2]$: $f(x) < 0$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-\ln 2; +\infty[$, $f(-\ln 2) = -\frac{25}{4}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

D'après le théorème de la bijection, la fonction s'annule une unique fois sur $[-\ln 2; +\infty[$.

EXERCICE 5A.3 - BAC 2007

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} par : $f(x) = e^{-x} + 2x - 3$

Soit C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Limites aux bornes

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 = +\infty$

Par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. $f(x) = e^{-x} + 2x - 3 = e^{-x}(1 + 2xe^x - 3e^x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ par somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 2xe^x - 3e^x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, par produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2. Asymptote oblique

a. Soit la droite (d) d'équation $y = 2x - 3$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0^+$

Donc la droite (d) est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

b. La différence étant positive car égale à e^{-x} , la courbe C_f est toujours au-dessus de la droite (d).

3. Étude des variations de la fonction f

a. f est dérivable en tant que composée de fonctions exponentielles.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^{-x} + 2 = -\frac{1}{e^x} + 2 = \frac{-1 + 2e^x}{e^x}$

b. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation d'inconnue x :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$

c. Signe de la dérivée f' sur \mathbb{R} :

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^x > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x > -\ln 2$

→ Si $x \in]-\ln 2; +\infty[: f'(x) > 0$

d. Tableau de variations de la fonction f .

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		\emptyset	
		-	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		$-2\ln 2 - 1$	

$f(-\ln 2) = e^{\ln 2} + 2 \times (-\ln 2) - 3 = 2 - 2\ln 2 - 3$

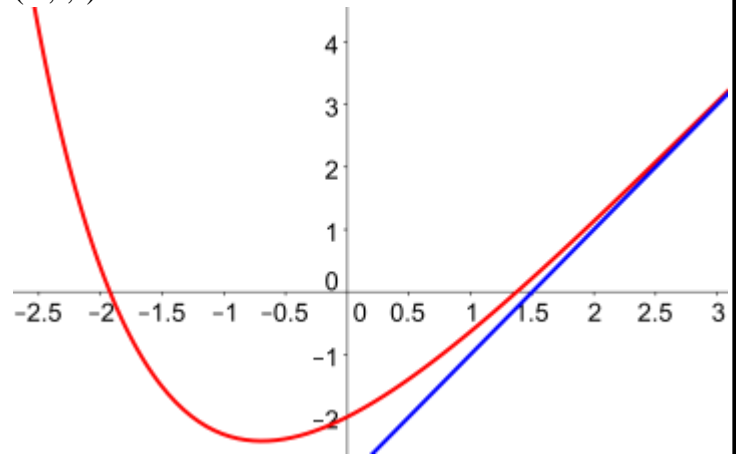
$f(-\ln 2) = -2\ln 2 - 1$

e. $f(1) = e^{-1} + 2 \times 1 - 3 = e^{-1} - 1$

f est strictement croissante sur $[0; 1]$ et $f(1) < 0$

donc $\forall x \in [0; 1] : f(x) < 0$

4. Tracer la droite (d) et la courbe C_f dans le repère (O,I,J)



EXERCICE 5A.4 - BAC 2008

Partie A - On note g la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par :

$g(x) = e^{-x}(-3x + 1) + 1$

1. g est dérivable en tant que composée de fonctions exponentielles et de fonctions polynomiales.

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -e^{-x}(-3x + 1) + e^{-x} \times (-3)$

$g'(x) = e^{-x}(3x - 1) + e^{-x} \times (-3) = e^{-x}(3x - 4)$

2. Sens de variation de la fonction g sur \mathbb{R} :

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ et $3x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$

Donc si $x > \frac{4}{3}$, alors $g'(x) > 0$

Tableau de variation (On ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$) :

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$		\emptyset	
		-	+
$g(x)$			
		$g\left(\frac{4}{3}\right)$	

3. $g\left(\frac{4}{3}\right) = e^{-\frac{4}{3}} \left(-3 \times \frac{4}{3} + 1\right) + 1 = e^{-\frac{4}{3}}(-4 + 1) + 1$

$g\left(\frac{4}{3}\right) = -3e^{-\frac{4}{3}} + 1 \approx 0,21$

$g\left(\frac{4}{3}\right) > 0$ donc l'étude de la fonction g sur les

intervalles $\left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$ et $\left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$ permet d'affirmer

que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.

Partie B - On considère maintenant la fonction f définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par :

$$f(x) = e^{-x}(3x+2) + x$$

On note C_f sa courbe représentative dans le repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

1. Étude des limites.

a. $f(x) = 3xe^{-x} + 2e^{-x} + x = 3\frac{x}{e^x} + 2e^{-x} + x$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Étude des variations de f .

a. Calculer la dérivée f' de la fonction f , et démontrer que, pour tout réel x : $f'(x) = g(x)$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

3. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$, et préciser la position de la courbe C_f par rapport à la droite D.

(On notera A leur point d'intersection.)

4. Déterminer l'abscisse du point B de la courbe C_f

où la tangente T est parallèle à la droite D.

5. Tracer, dans le repère (O, I, J), les droites D et T. Placer les points A et B puis tracer la courbe C_f .